Classe :3 ème Math	SERIE D' EXERCICES Suites réelles	Ascolaire : 2010/2011

Exercice 1 : Vrai-faux.

1) Deux suites (X_n) et (Y_n) sont définies pour $n > 0$ par: $X_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}$ et $Y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$ Alors:

   a) Les suites (X_n) et (Y_n) sont toutes les deux croissantes.

   b) Les suites (X_n) et (Y_n) ne sont pas majorées.

   c) $X_3 = \frac{19}{20}$ et $Y_3 = \frac{37}{60}$

2) Une suite (U_n) est définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 1,5 \\ U_{n+1} = 2U_n - 1 \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

   a) La suite (U_n) converge vers 1, abscisse du point d'intersection des droites d'équations : $y = x$ et $y = 2x - 1$

   b) La suite (V_n), définie sur IN par $V_n = U_n - 1$, est géométrique.

   c) La suite (V_n) est majorée

Exercice 2 : On considère la suite (U_n) définie, pour tout entier naturel non nul, par $U_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.

1) En calculant leurs carrés, comparer les nombres : $\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}\right)$ et $2\sqrt{n}$
2) En déduire que la suite (U_n) est décroissante.
3) On pose $S_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$. Exprimer S_n en fonction de n. Quel est le sens de variation de (S_n)?

Exercice 3 : Soit (U_n), la suite définie par: $U_n = \frac{2n+1}{n+3}$.

1) Déterminer le sens de variation de cette suite ; en déduire un minorant.
2) Montrer que cette suite est majorée par 2.
3) Exprimer $2 - U_n$ en fonction de n. En déduire pour quels rangs p on a : $1,999 \le U_p \le 2$.
   Combien la suite (U_n) possède-t-elle de termes n'appartenant pas à l'intervalle $[1,999; 2]$?

Exercice 4 :

1) On définit, pour tout entier naturel $n > 0$, la suite (U_n) par $U_n = \frac{n^2}{2^n}$ et la suite (V_n) par $V_n = \frac{U_{n+1}}{U_n}$

   a) Vérifier que $\forall\, n \in IN^*$ $V_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$

   b) Montrer que, pour tout entier naturel $n > 0$on a : $V_n > \frac{1}{2}$

   c) Trouver le plus petit entier N tel que, si $n \ge N$, $V_n < \frac{3}{4}$. En déduire que si $n \ge N$, alors $U_{n+1} < \frac{3}{4} U_n$

2) On pose, pour tout entier naturel $n \ge 5$: $S_n = U_5 + U_6 + \ldots + U_n$.

   a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \ge 5$: $U_n \le \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} U_5$

   b) Montrer que, pour tout entier naturel $n \ge 5$: $S_n \le \left[1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}\right] U_5$

   c) En déduire que, pour tout entier naturel $n \ge 5$: $S_n \le 4U_5$

3) Montrer que la suite $(S_n)_{n \ge 5}$ est croissante et en déduire qu'elle bornée.

Exercice 5 : Soit (U_n) la suite définie par : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \frac{U_n}{U_n + 2}$, pour tout entier n.

1) Montrer que la suite (U_n) est définie pour tout entier n et que $U_n > 0$.

2) a) Démontrer que, pour tout entier n, $\frac{U_{n+1}}{U_n} \le \frac{1}{2}$

   b) En remarquant que $\frac{U_n}{U_0} = \frac{U_n}{U_{n-1}} \times \frac{U_{n-1}}{U_{n-2}} \times \ldots \times \frac{U_1}{U_0}$ démontrer que $U_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$